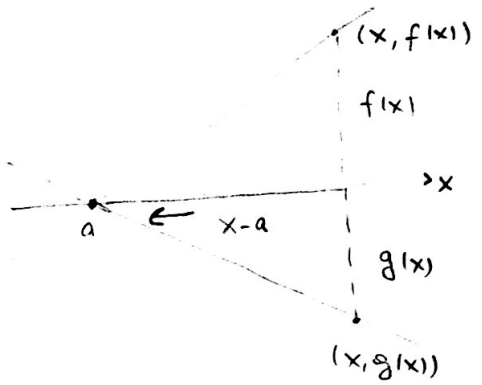
7.6. L'Hopital's Kuralı:

Teorem 1: (L'Hopital's kuralı) (Birinci form)

Farzedelim ki $f(a) = g(a) = 0$, $f'(a)$ ve $g'(a)$ var ve $g'(a) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

İspat:



m_1 ve m_2 sırasıyla f ve g fonksiyonların eğimleri olsun. x , a'ya yakınol

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \frac{m_1}{m_2}$$

$x \to a$ iken , m_1 ve m_2 $f'(a)$ ve $g'(a)$ 'ya yaklaşır ve

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{m_1}{m_2}$$

- Tersine işlem yaparsak:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Teorem 2: (L'Hopital kuralı: Gaalı form)

Farzedelim ki $f(a) = g(a) = 0$, a'yı içeren bir I açık aralığı üzerinde f ve g fonk. türevlenebilir olduğunu ve $g'(x) \neq 0$ (I aralığında) kabul edelim. $x \neq a$ ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Burada sağ taraftaki limitlerin var olduğunu kabul ediyoruz.

Örnek: $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği

1) a. $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right]_{x=0} = 2$ (Birinci kısım örnek.)

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = ? \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}, \text{ (limit bulundu)}$$

(L' Hopital's yanlış kullanıldığına ilişkin örnek.)

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 \text{ , (limit bulundu)}$$

Eğer bir kez daha L'Hopital kuralını uygularsak,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \text{ yanlış.}$$

- L' Hopital kuralı aynı zamanda tek-taraflı limitlere de uygulanabilir.

Örnek 4: a) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (L'Hopital's tek-taraflı limitlere de uygulanabilir.)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

b) $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \quad \left(\frac{-1}{0}\right)$$

$\infty \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ ve $\infty - \infty$ Belirsiz formlar)

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x \to a$ iken her iki tarafta sonsuza yaklaşıyor ise ,

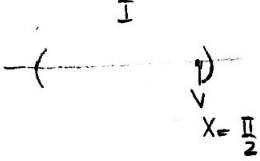
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$, limitler var olduğu sürece.

Örnek: a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{1+\tan x} = ?$

Pay ve payda ($\sec x$) ve $(1+\tan x)$ $x = \frac{\pi}{2}$ 'de süreksiz.

Böylece burada tek-taraflı limiti inceleyeceğiz.

I: açık aralık:



I açık aralıkta $x = \frac{\pi}{2}$ son uç nokta olarak alalım.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{(sol taraftan)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$$

Eğer sağdan yaklaşsaydık yine limit 1 'dir.

Dolayısı ile çift-taraflı limit 1 'dir.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sec x}{1+\tan x} : \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$$

$x \to \frac{\pi}{2}^+$ $\sec x \to -\infty$

$x \to \frac{\pi}{2}^+$ $\tan x \to -\infty$

$= 1$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Örnek: $(\infty \cdot 0)$ formundaki belirsizlikler:

(a) $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\frac{1}{x}$ $\infty \cdot 0$ belirsizliği var.

$h = \frac{1}{x}$ $= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \sin h = 1$ $\to 1$

(b) Benzer şekilde

$\lim_{x\to -\infty} \left(x \cdot \sin\frac{1}{x} \right) = 1.$

$h = \frac{1}{x}$ $x = \frac{1}{h}$

$x \to -\infty$, $h \to 0^-$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \cdot \sin h = 1.$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$ $(0 \cdot \infty)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$

Örnek: $(\infty - \infty)$ formundaki belirsizlikler:

i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

a) Eğer $x \to 0^+$ iken $\sin x \to 0^+$ ve

$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \infty - \infty$

Benzer şekilde $x \to 0^-$ iken $\sin x \to 0^-$

$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = (-\infty) - (-\infty) = -\infty + \infty$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{belirsizlik var.}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

2) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4} \right) = ? \qquad (\infty - \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4} \right) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}} \right\}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x+1 - (2x+4) \right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x-3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1/2} + \frac{2}{2} \cdot (2x+4)^{-1/2}}$$

$$= \frac{-1}{0} = -\infty$$

3) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\ln x - (x-1)}{(\ln x) \cdot (x-1)} \right)$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} \cdot (x-1) + \ln x \cdot 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\ln x - \frac{(1-x)}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{\ln x \cdot x - (1-x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \ldots}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(1^∞, 0^0 ve ∞^0 şeklindeki belirsiz formlar)

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)} = e^L \text{'dir.}$$

Burada a sonlu veya sonsuz olabilir.

Örnek: (1^∞): $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (1^\infty)$$

$$\ln f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

Örnek: 0^0 Belirsizliği:

$\lim_{x\to 0^+} x^x = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliğine çevirmek istiyoruz.

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1 \text{ dir.}$$

Örnek: (∞^0) formundaki belirsizlik

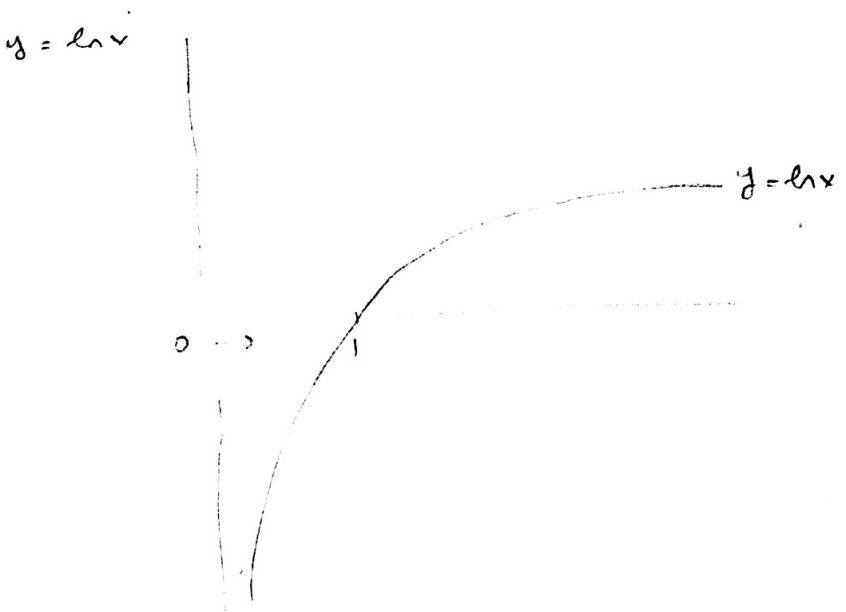
$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = ? \qquad (\infty)^0.$$

$$f(x) = x^{1/x}, \qquad \ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$$



L' Hopital's kuralı:

Örnekler: 1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x - 3\sin 3x}{5x^3} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$

c'nin hangi değeri için $f(x)$ fonksiyonu $x=0$'da sürekli dir.?

Sürekli olabilmesi için:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = L$, $f(0) = c$, , $f(x=0) = L$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{9x - 3\sin 3x}{5x^3} \cdot \dfrac{0}{0}$ Belirsizliği var.

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{9 - 9\cos 3x}{15x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{+\cancel{27}\sin 3x}{\cancel{30}x_{10}} \cdot \left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{27\cos 3x}{10} = \dfrac{27}{10}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{27}{10}$, $c = \dfrac{27}{10}$

2) 0^∞ bir Belirsizlik olduğu halde neden 0^∞ bir belirsizlik değil?

Farzedelim ki $f(x)$ fonksiyonu c'yi içeren bir açık I aralığında negatif olmayan bir fonksiyon olsun, ve

$\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

(a) $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$ ise $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = 0$

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)} = e^{L}$$

$$\lim_{x\to c} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} g(x).\ln f(x) = L$$

- $\lim_{x\to c} g(x).\lim_{x\to c} \ln f(x)$
- $\lim_{x\to c} g(x)\ \ln \lim_{x\to c} f(x)$
- $\infty . (-\infty) = -\infty$

$\ln 0 \to -\infty$

$\ln 0 = y$

$0 = e^{y}$ $\quad y = -\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{L} = e^{-\infty} = 0 \text{ 'dır.}$$

Örnek:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$$

Bu limitlerden hangisi doğrudur?